ポアソン分布

澤井

時間間隔Ｔの間に平均ｎ回生起する事象の、区間Ｔ内の生起回数の分布を求める。

ｎに比べて十分大きいＮを考える。ＴをＮ等分した微小区間の一つについて、事象は高々1回しか生起せず､生起するか否か独立排反事象である。その生起確率をｐ（pN＝n)とすると、全区間Ｔ内の事象は次式で表すことができる。

$$1=\{p+(1-p)\}^{N}=\sum_{k=0}^{N}\frac{N!}{k!(N-k)!}p^{k}(1-p)^{N-k}$$

ここで、N→∞とするとｐ→0 だから

$$(1-p)^{N}=\left\{(1-p)^{1/p}\right\}^{Np}\to e^{-n}$$

だから、全区間の事象は次式となる。これをポアソン(Poisson)分布と言う。

$$1=\{p+(1-p)\}^{N}=\sum_{k=0}^{N}\frac{N!}{k!(N-k)!}p^{k}(1-p)^{N-k}\to\sum_{k=0}^{\infty}\frac{N^{k}}{k!}p^{k}e^{-n}$$

$$=e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^{k}}{k!}$$

したがって、0 の周りのｒ次モーメント M(r) は

$$M(r)=e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^{r}n^{k}}{k!}$$

$$M(1)=e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{kn^{k}}{k!}=e^{-n}n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^{k}}{k!}=n$$

$$M(2)=e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^{2}n^{k}}{k!}=e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{k(k-1)+k\}n^{k}}{k!}=e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{n^{2}+n\}n^{k}}{k!}$$

$$=n^{2}+n$$

これより、生起数は期待値ｎ、分散ｎの分布をする

最終更新：10/10/18

掲載開始：10/07/20